

**ROYAUME DU MAROC**

**المملكة المغربية**

Ministère de l'Enseignement Supérieur,
de la Formation des Cadres et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2015
**École Nationale Supérieure d'Électricité et de Mécanique**




# CONCOURS NATIONAL COMMUN

d'Admission dans les Établissements de Formation
d'Ingénieurs et Établissements Assimilés

Édition 2015

## ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Filière **MP**

Durée **4** heures

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de calculatrice est interdit

**L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 4 pages.**
**L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit.**

*Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les* *références* *des questions abordées.*

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

Le sujet de cette épreuve est composé de deux problèmes indépendants entre eux.

# Problème 1

## Étude des solutions d'une équation différentielle

Si $p$ est un entier $\geqslant 2$ et $r \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à $p$ lignes et $r$ colonnes. Si $p = r$, $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$ est noté simplement $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, c'est l'algèbre des matrices carrées réelles d'ordre $p$ ; $I_p$ désignera la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Si $M \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$, ${}^tM$ désigne la matrice transposée de $M$.

Dans ce problème, $n$ désigne un entier naturel $\geqslant 2$. Le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ se notera $< \, , >$ et la norme associée sera notée $\|.\|$ ; il est défini par $(x, y) \longmapsto <x,y> := {}^ty\, x$.

On considère une application continue $A : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^+, \forall\, x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad < A(t)x, x >= {}^txA(t)x \geq 0.$$

On note $\Sigma_A$ l'ensemble des applications $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ deux fois dérivables et vérifiant

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^+, \quad F''(t) = A(t)F(t). \tag{1}$$

### 1ère Partie
### Structure de l'ensemble $\Sigma_A$

On considère l'application $B : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, $t \longmapsto B(t) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A(t) & 0 \end{pmatrix}$ ; $B$ est continue puisque l'application $A$ l'est aussi. On note alors $\Sigma_B$ l'espace vectoriel réel des solutions sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation différentielle

$$x' = B(t)x. \tag{2}$$

Si $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une application deux fois dérivable, on lui associe l'application $x_F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^+, \quad x_F(t) = \begin{pmatrix} F(t) \\ F'(t) \end{pmatrix}.$$

**1.1.** Vérifier que $\Sigma_A$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

**1.2. Détermination de la dimension de $\Sigma_A$.**

**1.2.1.** Soit $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une application deux fois dérivable.
Montrer que $F \in \Sigma_A$ si, et seulement si, $x_F \in \Sigma_B$.

**1.2.2.** Montrer que l'application $\Phi : \Sigma_A \longrightarrow \Sigma_B$, $F \longmapsto x_F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels réels.

**1.2.3.** En déduire la dimension de l'espace vectoriel réel $\Sigma_A$.

**1.3.** Montrer que, pour tout triplet $(s, v, w) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe une unique application $F$, élément de $\Sigma_A$, telle que $F(s) = v$ et $F'(s) = w$.

## $2^{\text{ème}}$ Partie
## Quelques propriétés des solutions de l'équation différentielle (1)

**2.1.** Soit $F \in \Sigma_A$ ; on lui associe l'application $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \|F(t)\|^2$, $t \geq 0$.

**2.1.1.** Montrer que $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et exprimer sa dérivée seconde.

**2.1.2.** En déduire que la fonction $f$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$.

**2.2.** On conserve les hypothèses et les notations de la question **2.1.** précédente ; on suppose de plus qu'il existe un couple $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leq t_1 < t_2$ et $F(t_1) = F(t_2) = 0$.

**2.2.1.** Montrer que, pour tout $t \in [t_1, t_2]$, $f(t) = 0$.

**2.2.2.** Montrer que la fonction $F$ est nulle.

**2.3. Une famille de solutions non bornées de (1)**

Soit $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ; on note $F_v$ l'élément de $\Sigma_A$ tel que $F_v(0) = F_v'(0) = v$.

Montrer que si $v \neq 0$ alors la fonction $t \longmapsto \|F_v(t)\|$ admet une limite infinie en $+\infty$.

**2.4. Des normes sur $\Sigma_A$**

Soit $b$ un réel strictement positif.

**2.4.1.** Montrer que l'application $\Psi : \Sigma_A \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $F \longmapsto (F(0), F(b))$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels réels.

**2.4.2.** Montrer que l'application $\|.\|_b : F \longmapsto \|F(0)\| + \|F(b)\|$ est une norme sur $\Sigma_A$.

**2.4.3.** Montrer également que l'application $\|.\|_{\infty,b} : F \longmapsto \sup\limits_{0 \leq t \leq b} \|F(t)\|$ est une norme sur $\Sigma_A$.

**2.4.4.** Justifier que les normes $\|.\|_{\infty,b}$ et $\|.\|_b$, sur $\Sigma_A$, sont équivalentes.

## $3^{\text{ème}}$ Partie
## Comportement de solutions de l'équation différentielle (1)

**3.1. Une famille de suites d'éléments de $\Sigma_A$**

Soit $a \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur non nul. Pour tout entier $m \geq 1$, on note $g_{m,a}$ l'unique élément de $\Sigma_A$ vérifiant $g_{m,a}(0) = a$ et $g_{m,a}(m) = 0$.

**3.1.1.** Montrer que, pour tout entier $m \geq 1$, l'application $t \longmapsto \|g_{m,a(t)}\|$ est décroissante sur le segment $[0, m]$.

**3.1.2.** Montrer alors que $(g_{m,a})_{m \in \mathbb{N}^*}$ est une suite bornée de l'espace vectoriel normé $(\Sigma_A, \|.\|_1)$.

**3.1.3.** Justifier que la suite $(g_{m,a})_{m \in \mathbb{N}^*}$ possède une sous-suite $(g_{\sigma(m),a})_{m \in \mathbb{N}^*}$ qui converge dans $(\Sigma_A, \|.\|_1)$ vers un élément noté $g_a$.

**3.2. Une famille de solutions bornées de (1)**

On conserve ici les notations de la question **3.1.** précédente.

**3.2.1.** Montrer que la suite de fonctions $(g_{\sigma(m),a})_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^+$ vers l'application $g_a$.

**3.2.2.** Montrer que $g_a(0) = a$ et que l'application $t \longmapsto \|g_a(t)\|$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

**3.2.3.** Montrer que $g_a$ est une solution bornée de l'équation différentielle (1).

**3.3. Comportement asymptotique des solutions de l'équation différentielle (1)**

On conserve ici les notations des questions et des parties précédentes. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base quelconque de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ; on lui associe une famille $(g_{e_1}, ..., g_{e_n})$ d'applications construites comme à la question **3.1.** précédente et on note $\Sigma_1$ le sous-espace vectoriel de $\Sigma_A$ engendré par cette famille d'applications.

**3.3.1.** Montrer que les éléments de $\Sigma_1$ sont des solutions bornées de l'équation différentielle (1).

**3.3.2.** Montrer que la famille $(g_{e_1}, ..., g_{e_n})$ est une base de $\Sigma_1$.

**3.3.3.** Pour tout $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $F_v$ désigne l'élément de $\Sigma_A$ vérifiant $F_v(0) = F_v'(0) = v$. Montrer que l'ensemble $\Sigma_2 := \{F_v \, ; \, v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$ est un sous-espace vectoriel de $\Sigma_A$, de dimension $n$.

**3.3.4.** Montrer que les sous-espaces vectoriels $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ sont supplémentaires dans $\Sigma_A$.

**3.3.5.** Montrer que $\Sigma_A \setminus \Sigma_1$ est un ouvert dense de $\Sigma_A$ et que toute solution $F$ de l'équation différentielle (1) vérifie : $\begin{cases} \text{si } F \in \Sigma_A \setminus \Sigma_1, \text{ alors } \|F(t)\| \underset{t \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty \, ; \\ \text{si } F \in \Sigma_1, \text{ alors } F \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^+. \end{cases}$

# Problème 2

## Un résultat de LIOUVILLE relatif aux fonctions harmoniques sur $\mathbb{Z}^d$

Dans ce problème, le nombre $d$ est un entier naturel strictement positif. On note $\|.\|_1$ la norme définie sur $\mathbb{R}^d$ par $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|$, pour tout $x = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$. Pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, on définit $V(x)$ le voisinage discret (sous-entendu dans $\mathbb{Z}^d$) de $x$ par : $V(x) = \{y \in \mathbb{Z}^d\,;\, \|y - x\|_1 = 1\}$.

Ce voisinage est l'ensemble des plus proches voisins de $x$, il est fini de cardinal $2d$.

Si $A$ est une partie non vide de $\mathbb{Z}^d$, on note $I(A)$ l'ensemble des $x \in A$ tels que $V(x) \subset A$ et $\partial A$ le complémentaire dans $A$ de $I(A)$. On remarquera que pour $A = \mathbb{Z}^d$ on a $I(A) = A$ et $\partial A = \emptyset$, et pour $A$ fini de cardinal $< 2d$, on a $I(A) = \emptyset$ et $\partial A = A$.

On dit qu'une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est harmonique sur $I(A)$ si, pour tout $x \in I(A)$,

$$f(x) = \frac{1}{2d} \sum_{y \in V(x)} f(y).$$

Toutes les variables aléatoires considérées dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter.

### $1^{\text{ère}}$ Partie
### Fonctions harmoniques sur le graphe $\mathbb{Z}^d$

*Dans les trois premières questions de cette partie, on prend $d = 1$.*

**4.1.** Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ est harmonique sur $\mathbb{Z}$ si, et seulement si, quel que soit l'entier relatif $k$, on a $f(k+2) - 2f(k+1) + f(k) = 0$.

**4.2.** Montrer que l'ensemble des fonctions harmoniques sur $\mathbb{Z}$ est un espace vectoriel de dimension 2, préciser une base de cet espace.

**4.3.** Montrer que l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{Z}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, harmoniques sur $I(\mathbb{Z}^*)$, est un espace vectoriel de dimension 4, préciser une base de cet espace. On commencera par déterminer $I(\mathbb{Z}^*)$.

*Dans la suite de cette partie, $d$ est un entier strictement positif quelconque.*

**4.4.** On considère une fonction $f : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, positive et harmonique sur $\mathbb{Z}^d$.

**4.4.1.** Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$ et tout $\ell \in V(k)$, $f(\ell) \leq 2d\, f(k)$.

**4.4.2.** Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$ et tout $\ell \in \mathbb{Z}^d$, $f(\ell) \leq (2d)^{\|\ell - k\|_1} f(k)$.

**4.4.3.** Montrer que si $k \in \mathbb{Z}^d$ et $f(k) = 0$, alors $f$ est la fonction nulle.

**4.4.4.** Montrer que si $f$ n'est pas la fonction nulle, alors, pour tout $\ell \in \mathbb{Z}^d$, $|\ln(f(\ell)) - \ln(f(k))| \leq \|\ell - k\|_1 \ln(2d)$.

### $2^{\text{ème}}$ Partie
### Un résultat de LIOUVILLE dans un cadre discret

*L'objectif de cette partie est d'établir le résultat suivant dû à LIOUVILLE :*

*Si $f : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est harmonique et minorée (resp. majorée) sur $\mathbb{Z}^d$, alors $f$ est constante.*

L'entier $d$ est quelconque dans $\mathbb{N}^*$ et la base canonique de $\mathbb{R}^d$ est notée $(e[1], ..., e[d])$. On a donc

$$\forall\, (i,j) \in \{1, ..., d\}^2, \quad e[i]_j = \begin{cases} 1 & \text{si}\, i = j\,; \\ 0 & \text{si}\, i \neq j. \end{cases}$$

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui sont mutuellement indépendantes et de même loi, la loi uniforme sur l'ensemble $D_d = \{-d, -d+1, ..., -1, 1, ..., d-1, d\}$.

On définit une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant

$$Y_0 = 0, \text{ et}\, \forall\, n \in \mathbb{N},\, Y_{n+1} = Y_n + sign(X_n)\, e[|Xn|],$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $sign(k) = \frac{k}{|k|}$.

Noter que chaque $Y_n$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ qu'on écrit $Y_n = \sum_{j=1}^{d} Y_{n,j}\, e[j]$ ; les composantes $Y_{n,j}$ de $Y_n$ sont des variables aléatoires à valeurs entières.

La suite $Y$ est appelée *une marche aléatoire symétrique* sur $\mathbb{Z}^d$, issue de 0. On modélise ainsi l'évolution d'un point mobile sur $\mathbb{Z}^d$, qui à tout instant $n$ choisit au hasard uniforme un des $2d$ plus proches voisins de sa position précédente $Y_{n-1}$.

On considère aussi une variable aléatoire $U$, indépendante des $X_n$ (et donc des $Y_n$) qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ fixé.

**5.1.** Soit $g$ une fonction à valeurs réelles, définie sur $\mathbb{Z}^d$ et vérifiant

$$\exists (a,b) \in [0,+\infty[^2,\ \forall\, k \in \mathbb{Z}^d,\ |g(k)| \leq \exp(a\|k\|_1 + b).$$

**5.1.1.** Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $|g(Y_n)| \leq \exp(an+b)$.

**5.1.2.** En utilisant le théorème de transfert, montrer que l'espérance de la variable aléatoire $g(Y_U)$ existe et établir l'inégalité

$$E(|g(Y_U)|) \leq \exp(b + \lambda(e^a - 1)).$$

**5.1.3.** Montrer aussi la relation $E(g(Y_U)^2) = \sum_{k \in Z^d} g(k)^2 P\{Y_U = k\}$, en justifiant l'existence de l'espérance et la sommabilité de la famille, mises en jeux dans les deux membres de cette égalité.

**5.2.** On considère une fonction $f : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{R}^+$, harmonique sur $\mathbb{Z}^d$ et vérifiant $f(0) = 1$. On rappelle un résultat vu dans la première partie : $f(k) \leq (2d)^{\|k\|_1}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$.

**5.2.1.** Montrer que les variables aléatoires $f(Y_j)$, pour $j \in \mathbb{N}$, et $f(Y_U)$ admettent toutes un moment d'ordre 2 et prouver les relations

$$E\Big(f(Y_U)^2\Big) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} E\Big(f(Y_n)^2\Big) \quad \text{et} \quad E(f(Y_U)) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} E(f(Y_n)).$$

**5.2.2.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(f(Y_n)) = f(0) = 1$ et en déduire que $E(f(Y_U)) = 1$.

**5.3.** On note $H$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $E(f(Y_U)^2)$ existe. Montrer que $H$ est un espace vectoriel réel et que l'application $S : (f_1, f_2) \longmapsto S(f_1, f_2) = E(f_1(Y_U) f_2(Y_U))$ est un produit scalaire sur $H$. La norme associée est notée $\|.\|_2$.

**5.4.** On note $E$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qui sont harmoniques sur $\mathbb{Z}^d$ et vérifiant $f(0) = 1$. Cet ensemble $E$ est non vide (il contient la fonction constante 1) et il est inclus dans l'espace $H$, d'après la question **5.2.** précédente.

On choisit une fonction $m \in E$ de norme $\|.\|_2$ maximale, c'est-à-dire $E(f(Y_U)^2) \leq E(m(Y_U)^2)$ pour tout $f \in E$. La possibilité d'un tel choix **est admise** et on sait, d'après la première partie, que $m$ ne s'annule pas sur $\mathbb{Z}^d$. Pour tout $i \in D_d = \{-d, -d+1, ..., -1, 1, d-1, d\}$ on définit une fonction $f_i : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{R}^+$ en posant

$$f_i(x) = \frac{m(x + sign(i)\, e[|i|])}{m(sign(i)\, e[|i|])}.$$

**5.4.1.** Montrer que, pour tout $i \in D_d$, la fonction $f_i$ est harmonique sur $\mathbb{Z}^d$ et vérifier qu'elle est positive et satisfait $f_i(0) = 1$.

**5.4.2.** Montrer que la fonction $m$ est une combinaison convexe des fonctions $f_i$, $i \in D_d$.

**5.4.3.** En déduire que, pour tout $i \in D$ et tout $x \in \mathbb{Z}^d$, $m(x) = f_i(x)$, puis montrer que $m$ est la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{Z}^d$.

**5.5.** On considère une fonction $f : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{R}^+$, harmonique sur $\mathbb{Z}^d$ et vérifiant $f(0) = 1$. Montrer l'inégalité $V(f(Y_U)) \leq E(m(Y_U)^2) - 1$, puis en déduire que $f$ est constante sur $\mathbb{Z}^d$.

**5.6.** Comment prouver le résultat général de LIOUVILLE ?

## FIN DE L'ÉPREUVE